МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра цифровых технологий,
математики и экономики

Методические указания
к самостоятельной работе и выполнению расчетно-графической работы

Дисциплина Б1.О.05.05 Методы принятия решений
код и наименование дисциплины

Направление подготовки 09.03.01 Информатика и вычислительная техника
код и наименование направления подготовки /специальности

Направленность (профиль) Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем
наименование направленности (профиля) /специализации образовательной программы

Квалификация выпускника бакалавр
указывается квалификация (степень) выпускника в соответствии с ФГОС ВО

Мурманск
2021

Составитель – Авдеева Елена Николаевна, доцент кафедры цифровых технологий, математики и экономики Мурманского государственного технического университета

Методические указания к самостоятельной работе и выполнению контрольной работы рассмотрены и одобрены на заседании кафедры-разработчика: ЦТМиЭ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Данные методические указания разработаны в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки09.03.01 Информатика и вычислительная техника.

Целью дисциплины: «Методы принятия решений» является формирование компетенций в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки бакалавра и учебным планом для направления подготовки 09.03.01 Информатика и вычислительная техника, что предполагает формирование у обучающегося знаний современных методов принятия решений, которые позволяют лицу, принимающему решение, сочетать собственные субъективные предпочтения с практическим анализом ситуации методами исследования операций в процессе выработки оптимальных решений.

Задачи дисциплины: определение роли математических методов в системе принятия проектных решений; овладение методическими основами формализации задач обоснования и принятия решений.

В соответствии с рабочей программой по дисциплине «Методы принятия решений» объем времени на самостоятельную работу бакалавров составляет:

- 84 часа (очная форма обучения).

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование универсальной компетенции УК-2 в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки 09.06.01 Информатика и вычислительная техника. Компетенция реализуется в части «Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из имеющихся ресурсов и ограничений».

В результате изучения дисциплины обучающийся должен:

***знать*:**

– основы методов принятия решений и математического моделирования;

***уметь*:**

– определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения;

***владеть*:**

– навыками решения задач исходя из имеющихся ресурсов и ограничений.

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

№ п\п	Наименование тем и содержание самостоятельной работы	Количество часов по очной форме обучения
1	Проблемы принятия решений. Классификация задач теории принятия решений. Постановка задачи теории принятия решений. Этапы обоснования принятия решений. Роль системного анализа в теории принятия решений. Количественное обоснование принятия решений методами исследования операций.	10
2	Линейное программирование. Формулировка, геометрическая интерпретация задач линейного программирования. Симплекс-метод. Двойственность в задачах линейного программирования.	10
3	Целочисленное линейное программирование. Особенности задач целочисленного программирования. Методы решения целочисленных задач.	10
4	Транспортная задача. Математическая модель прямой и двойственной задачи. Модели транспортных задач и их основные свойства. Метод потенциалов.	10
5	Динамическое программирование. Условия применимости динамического программирования. Принцип Беллмана. Вычислительные аспекты решения задач методом динамического программирования.	10
6	Сетевые и потоковые задачи. Основные приложения сетевых и потоковых алгоритмов. Венгерский алгоритм задачи о назначениях. Задача о многополюсном максимальном потоке.	17
7	Элементы теории массового обслуживания. Основные понятия. классификация СМО. Понятие Марковского случайного процесса. СМО с отказами. СМО с ожиданием.	17
	Итого:	84

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Федунец Н.И., Теория принятия решений : Учебное пособие для вузов /Федунец Н.И., Куприянов В.В. - М: Издательство Московского государственного горного университета, 2005. - 218 с. - ISBN 5-7418-0397-0 - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5741803970.html
2. Рыжиков Ю. И. Теория очередей и управление запасами : Учеб.пособие для вузов / Ю. И. Рыжиков. - Санкт-Петербург : Питер, 2001. - 384 с. : ил. - (Учебник для вузов). (11 экз)
3. Карманов, В. Г. Математическое программирование / В. Г. Карманов. - 5-е изд., стер. - Москва : Физматлит, 2001. - 264 с. (6 экз)
4. Корнеев, А. М. Методы принятия решений: методические указания к проведению практических занятий по курсу «Теория принятия решений» / А. М. Корнеев. — Липецк : Липецкий государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2012. — 19 с. — ISBN 2227-8397. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR

BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/22892.html
5. Черников Ю.Г., Системный анализ и исследование операций : Учебное пособие для вузов / Черников Ю.Г. - М: Издательство Московского государственного горного университета, 2006. - 370 с. - ISBN 5-7418-0424-1 - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL: http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5741804241.html

Дополнительная литература

6. Сухинин М.Ф., Численное решение задач линейного программирования и вычисление границ спектра симметричной матрицы [Электронный ресурс] / Сухинин М.Ф. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 160 с. - ISBN 5-9221-0242-7 - Режим доступа: http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922102427.html
7. Кириллов Ю.В., Прикладные методы оптимизации. Часть 1 : Методырешения задач линейного программирования : учеб. пособие / Кириллов Ю.В. - Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2012. - 236 с. - ISBN 978-5-7782-2053-9 - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL: http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785778220539.html
8. Казанская О.В., Модели и методы оптимизации : учеб. пособие / Казанская О.В. - Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2012. - 204 с. - ISBN 978-5-7782-1983-0 - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL: http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785778219830.html

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ И ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Целью самостоятельной работы студентов является:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать справочную и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений.

Самостоятельная работа является одним из видов учебных занятий обучающихся, проводится внеаудиторно, выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

Объем времени, отведенный на самостоятельную работу, определяется в соответствии с учебным планом направления подготовки и рабочей программой учебной дисциплины.

Тема 1: Проблемы принятия решений. (10 часов)

Классификация задач теории принятия решений. Постановка задачи теории принятия решений. Этапы обоснования принятия решений. Роль системного анализа в теории принятия решений. Количественное обоснование принятия решений методами исследования операций.

Методические указания:

- *изучите теоретический материал*

Литература: [1], [5], [6].

- *подготовьте ответы на вопросы*

Вопросы для самоконтроля:

1. Приведите основные положения общей схемы принятия решений.
2. Перечислите основных этапов решения проблем принятия решений.
3. Охарактеризуйте последовательность и особенности выполнения каждого из этапов.

Тема 2: Линейное программирование. (10 часов)

Формулировка, геометрическая интерпретация задач линейного программирования. Симплекс-метод. Двойственность в задачах линейного программирования.

Методические указания:

- *изучите теоретический материал*

Литература: [1], [5], [6], [7].

- *подготовьте ответы на вопросы*

Вопросы для самоконтроля:

1. Сформулируйте общую задачу линейного программирования.
2. Какое решение ЗЛП называется оптимальным?
3. Какая ЗЛП называется общей?
4. Какая ЗЛП называется канонической?
5. Что называется многогранником решений?
6. Приведите пример геометрической интерпретации ЗЛП.
7. Опишите симплекс-метод решения ЗЛП.
8. Сформулируйте теоремы двойственности.
9. Назовите особенности модели транспортной задачи и способы их решения.

- *решите задачу №1 РГР*

Тема 3: Целочисленное линейное программирование. (10 часов)

Особенности задач целочисленного программирования. Методы решения целочисленных задач..

Методические указания:

- *изучите теоретический материал*

Литература: [5], [8].

- *подготовьте ответы на вопросы*

Вопросы для самоконтроля:

1. Сформулируйте задачу целочисленного программирования
2. Опишите метод Гомори решения задачи целочисленного программирования?
3. Опишите метод ветвей и границ решения задачи целочисленного программирования

Тема 4:

Транспортная задача (10 часов)

Математическая модель прямой и двойственной задачи. Модели транспортных задач и их основные свойства. Метод потенциалов.

Методические указания:

- *изучите теоретический материал*

Литература: [5], [6], [7].

- *подготовьте ответы на вопросы*

Вопросы для самоконтроля:

2. Сформулируйте определение открытой и закрытой транспортной задачи.
3. Опишите методы нахождения первоначального базисного распределения поставок: метод «северо-западного» угла и метод наименьших затрат.
4. Сформулируйте теорему о потенциалах.
5. Сформулируйте критерий оптимальности транспортной задачи.
6. Приведите правило нахождения оценок свободных клеток.

    - *решите задачу № 2 РГР*

Тема 5: Динамическое программирование. (17 часов)

Условия применимости динамического программирования. Принцип Беллмана. Вычислительные аспекты решения задач методом динамического программирования.

Методические указания:

- *изучите теоретический материал*

Литература: [5], [8].

- *подготовьте ответы на вопросы*

Вопросы для самоконтроля:

1. Сформулируйте принцип оптимальности Беллмана.
2. Какое требование к наличию обратной связи в процессе управления должно выполняться?
3. Какое управление называется условным максимальным на n-ом шаге?
4. Запишите уравнения Беллмана.
5. Как называется процесс решения уравнений Беллмана?

    - *решите задачу № 3 РГР*

Тема 6: Сетевые и потоковые задачи . (17 часов)

Сетевые и потоковые задачи. Основные приложения сетевых и потоковых алгоритмов. Задача о многополюсной кратчайшей цепи. Венгерский алгоритм задачи о назначениях. Задача о многополюсном максимальном потоке.

Методические указания:

- *изучите теоретический материал*

Литература: [5], [8].

- *подготовьте ответы на вопросы*

Вопросы для самоконтроля:

1. Какой вид задач называется сетевыми?
2. Основные приложения сетевых и потоковых алгоритмов.
3. Сформулируйте Венгерский алгоритм задачи о назначениях .

Тема 7: Элементы теории массового обслуживания. (17 часов)

Основные понятия. классификация СМО. Понятие Марковского случайного процесса. СМО с отказами. СМО с ожиданием.

Методические указания:

- *изучите теоретический материал*

Литература: [2], [3].

- *подготовьте ответы на вопросы*

Вопросы для самоконтроля:

1. Приведите классификацию СМО.
2. Какие случайные процессы называются Марковскими?
3. Приведите пример использования графа состояний при анализе случайных процессов.
4. Сформулируйте понятие потока событий
5. Какой поток событий называется стационарным?
6. . Какой поток событий называется потоком без последствия?
7. Какой поток событий называется ординарным?
8. Какой поток событий называется простейшим?
9. Сформулируйте правило составления уравнений Колмогорова.
10. Приведите пример СМО с отказами.
11. Приведите пример СМО с ожиданием.

ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Номер варианта работы выбирается по последней цифре зачетной книжки.

Вариант № *MN*

M=0, если последний номер зачетной книжки – четное число N,

M=1, если последний номер зачетной книжки – нечетное число N.

Задача 1. Общая задача линейного программирования

Дана математическая модель задачи

$$Z = 3(M+N+1)x_1 + 4(M+N+1)x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 13 + M - N \\ x_1 + 2x_2 \le 25 + M - 2N \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$$

Задание:

1. Предложите содержательную интерпретацию задачи, представленную моделью.
2. Решите задачу графическим методом.
3. Решите задачу симплексным методом; решение оформите в таблицах.
4. Составьте математическую модель двойственной задачи и решите ее графически.
5. Запишите найденные значения неизвестных и оптимальные значения целевых функций прямой и двойственной задач.
6. Приведите формулировку теоремы теории двойственности, условиям которой удовлетворяет решение задачи.

Задача 2. Транспортная задача

Найти оптимальный план перевозок при заданной матрице стоимости перевозки единицы продукции (строки – данные поставщиков, столбцы – данные потребителей).

Задание:

1. Рассчитайте значение неизвестного объема продукции для потребителя так, чтобы задача была сбалансированной.
2. Выполните первоначальное распределение поставок методом наименьших затрат.
3. Решите задачу методом потенциалов, используя оценки свободных клеток.
4. Сформулируйте понятие цикла пересчета и оценки свободной клетки.

Вариант для N= 0

a* \ *b	**2**	**7**	**7**	**7**	**?**
4	16	30	17	10	16
6	30	27	26	9	3
10	13	4	22	3	1
10	3	1	5	4	24

Вариант для N=1

a* \ *b	**24**	**19**	**19**	**10**	**?**
20	15	1	22	19	1
20	21	18	11	4	3
20	26	29	23	26	24
20	21	10	3	19	27

Вариант для N= 2

a* \ *b	**11**	**5**	**11**	**11**	**?**
15	17	20	29	26	25
15	3	4	5	15	24
15	19	2	22	4	13
15	20	27	1	17	19

Вариант для N= 3

a* \ *b	**15**	**12**	**12**	**12**	**?**
13	20	26	24	26	29
17	15	20	29	26	23
17	4	10	27	30	7
13	9	16	29	20	3

Вариант для N= 4

a* \ *b	**8**	**12**	**8**	**8**	**?**
18	21	22	2	13	7
12	27	10	4	24	9
17	3	16	25	5	4
13	28	11	17	10	29

Вариант для N= 5

a* \ *b	9	20	9	9	?

15	10	17	9	20	30
15	13	4	24	26	26
19	22	24	30	27	29
11	25	12	11	24	23

Вариант для N= 6

b / ***a***	**20**	**25**	**15**	**15**	**?**
21	30	24	11	12	25
19	26	4	29	20	24
15	27	14	14	10	18
25	6	14	28	8	2

Вариант для N= 7

b / ***a***	**8**	**12**	**13**	**8**	**?**
9	5	15	3	6	10
11	23	8	13	27	12
14	30	1	5	24	25
16	8	26	7	28	9

Вариант для N=8

b / ***a***	**12**	**7**	**7**	**7**	**?**
22	9	17	29	28	8
13	13	21	27	16	29
17	20	30	24	7	26
18	11	19	30	6	2

Вариант для N= 9

b / ***a***	**6**	**12**	**13**	**20**	**?**
16	30	2	5	6	15
15	5	29	9	5	7
14	16	24	14	6	26
15	13	28	4	25	8

Задача 3. Задача динамического программирования

Планируется распределение начальной суммы $S_0 = 80$ усл. ед. между четырьмя предприятиями, причем средства выделяются только в размерах, кратных 20 усл. ед. Предполагается, что выделенные предприятию в начале планового периода средства x приносят прибыль $f_k(x)$.

Считать, что:

1) прибыль $f_k(x)$, полученная от вложения средств в предприятие, не зависит от вложения средств в другие предприятия;
2) прибыль, полученная от разных предприятий, выражается в одинаковых условных единицах;
3) суммарная прибыль равна сумме прибылей, полученных от каждого предприятия.

Функции $f_k(x)$ заданы в таблице

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
20	5+N	11–N	2	1+N
40	6+N	14–N	4	2+N
60	9+N	15–N	8	7+N
80	10+N	16–N	12	13+N

Задание:
1. Определить, какое количество средств нужно выделить каждому предприятию, чтобы суммарная прибыль была наибольшей (используйте принцип оптимальности и уравнения Беллмана).
2. Приведите расчетные таблицы (возможно использование Excel).
3. Опишите особенности модели.

ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ И ПОЯСНЕНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Решения задач содержат пояснения. При оформлении РГР пояснения можно не приводить.

Задача 1.

Дана математическая модель задачи

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \\ x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

Задание:
1. Предложите содержательную интерпретацию задачи, представленную моделью.
2. Решите задачу графическим методом.
3. Решите задачу симплексным методом; решение оформите в таблицах.
4. Составьте математическую модель двойственной задачи и решите ее графически.
5. Запишите найденные значения неизвестных и оптимальные значения целевых функций прямой и двойственной задач.
6. Приведите формулировку теоремы теории двойственности, условиям которой удовлетворяет решение задачи.

Решение:

1) *Содержательная интерпретация задачи, представленной моделью.*

Формулировка задачи, математическая модель которой имеет вид:

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \ (\max),$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \\ x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

может быть такой:

«Необходимо принять решение об оптимальном плане производства двух видов продукции P_1 и P_2, для изготовления которых используется три вида ресурсов S_1, S_2, S_3. Запасы ресурсов ограничены и составляют соответственно: 18, 16 и 5(условных единиц). На изготовление единицы продукции P_1 требуются ресурсы: 1ед. $-S_1$, 2ед.– S_2. На изготовление единицы продукции P_2 требуются ресурсы: 3ед. $-S_1$, 1ед.– S_2, 1ед. – S_3. Прибыль, получаемая от единицы продукции P_1 и P_2 – соответственно 2 руб. и 3 руб. Необходимо вычислить плановые значения x_1, x_2 – число единиц продукции соответственно P_1 и P_2, прибыль от реализации которых будет максимальной».

2) *Графический метод решения задачи.*

- Для построения области решений допустимо использование различных прикладных пакетов.
- Графическая модель должна содержать все линии, ограничивающие область допустимых решений, и две линии для значений целевой функции (нулевое: Z=0 и оптимальное, максимальное для этой модели Z=(max))

Возможный вариант иллюстрации к задаче представлен на рис. 1.

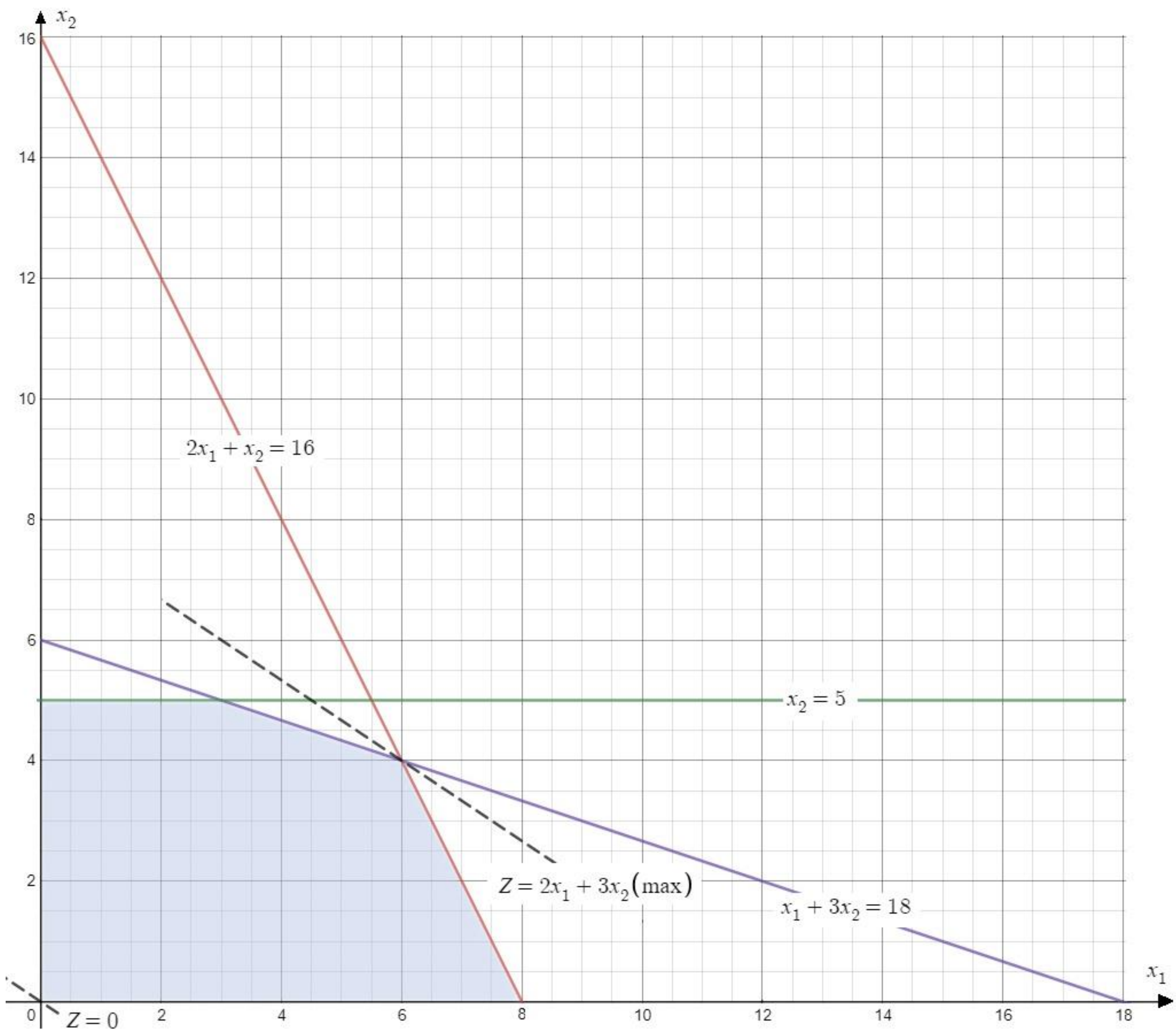

Рис.1.

3) Решение с использованием симплексных таблиц.

Для построения первого опорного плана систему неравенств следует привести к системе уравнений путем введения дополнительных переменных (переход к канонической форме).

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 18, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 16, \\ \qquad x_2 + x_5 = 5. \end{cases}$$

$$Z - 2x_1 - 3x_2 = 0$$

Например, *первый опорный план* может быть представлен таблицей:

Базисные переменные	Свободные члены	Переменные				
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	*18*	*1*	*3*	1	0	0
x_4	*16*	*2*	*1*	0	1	0
x_5	*5*	*0*	*1*	0	0	1
Z	0	-2	-3	0	0	0

Примерный алгоритм построения таблиц (*опорных планов*)

- Проверить выполнение критерия оптимальности полученного опорного плана.
- Если критерий оптимальности не выполнен, то осуществить переход к новой таблице по правилам:
  a) выбрать в индексной строке (строке, содержащей целевую функцию) отрицательное число и выделить столбец (разрешающий столбец), содержащий это число;
  b) разделить свободные члены на положительные числа разрешающего столбца и выбрать строку (разрешающую строку), для которой частное окажется наименьшим;
  c) в столбце базисных переменных заменить переменную из разрешающей строки на переменную из разрешающего столбца;
  d) в разрешающей строке все элементы поделить на разрешающий элемент (элемент, стоящий на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки);
  e) используя полученные значения строки, преобразовать оставшиеся элементы таким образом, чтобы все элементы разрешающего столбца предыдущей таблицы стали равными нулю, кроме разрешающего элемента (его значение должно остаться равным единице).
- Новые опорные планы по приведенному алгоритму следует составлять до выполнения критерия оптимальности.

Первый опорный план (приведенный выше) не является оптимальным, так как в *индексной* строке находятся отрицательные коэффициенты.

Базисные переменные	Свободные члены	Переменные				
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	*18*	*1*	*3*	1	0	0
x_4	*16*	*2*	*1*	0	1	0
x_5	*5*	*0*	*1*	0	0	1
Z	0	-2	-3	0	0	0

Используя алгоритм, строим вторую таблицу: *второй опорный план.*

Базисные переменные	Свободные члены	Переменные				
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	*10*	*0*	*2,5*	1	-0,5	0
x_1	*8*	*1*	*0,5*	0	0,5	0
x_5	*5*	*0*	*1*	0	0	1
Z	16	0	-2	0	1	0

Второй опорный план тоже не является оптимальным, так как в *индексной* строке находится отрицательный коэффициент.

Используя алгоритм, строим третью таблицу: *третий опорный план.*

Базисные переменные	Свободные члены	Переменные				
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	*4*	*0*	*1*	0,4	-0,2	0
x_1	*6*	*1*	*0*	-0,2	0,6	0
x_5	*1*	*0*	*0*	-0,4	0,2	1
Z	24	0	0	0,8	0,6	0

Третий опорный план является оптимальным, так как в *индексной* строке нет отрицательных коэффициентов.

При этом оптимальное значение целевой функции $Z = 24$ достигается при условии, что неизвестные равны соответственно $x_1 = 6, x_2 = 4$.

4) *Математическая модель двойственной задачи*

Математическая модель двойственной задачи :

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 2, \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \geq 3, \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

$$F = 18y_1 + 16y_2 + 5y_3 \to \min$$

5) *Найденные значения неизвестных и оптимальные значения целевых функций прямой и двойственной задач*

Ответ: $x_1 = 6; x_2 = 4; Z = F = 24.$

6) *Описание п.6 выполнить самостоятельно.*

Задача 2:

Найти оптимальный план перевозок при заданной матрице стоимости перевозки единицы продукции (строки – данные поставщиков, столбцы – данные потребителей).

b / ***a***	**20**	**110**	**40**	**110**
60	1	2	5	3
120	1	6	5	2
100	6	3	7	4

Задание:

1. Рассчитайте значение неизвестного объема продукции для потребителя так, чтобы задача была сбалансированной.
2. Выполните первоначальное распределение поставок методом наименьших затрат.
3. Решите задачу методом потенциалов, используя оценки свободных клеток.
4. Сформулируйте понятие цикла пересчета и оценки свободной клетки.

Решение:

Постановка задачи. *Найти объемы перевозок для каждой пары «поставщик-потребитель» так, чтобы: мощности всех поставщиков были реализованы; спросы всех потребителей были удовлетворены; суммарные затраты на перевозку были бы минимальны.*

Примерный алгоритм решения транспортной закрытой задачи:

a) *составить допустимое базисное распределение* (первоначальный план перевозок);
b) *проверить план на вырожденность* (если план не вырожденный, то он содержит $m+n-1$ заполненных клеток, распределение является *базисным*);
c) *расставить потенциалы* , используя заполненные клетки и посчитать *оценки свободных клеток*(к коэффициентам затрат таблицы поставок в каждой строке и столбце надо прибавить такие числа (потенциалы), чтобы коэффициенты затрат в заполненных клетках стали равными нулю. Полученные при этом коэффициенты затрат *свободных* клеток равны *оценкам* этих клеток)
d) сделать *вывод об оптимальности базисного распределения* поставок (базисное распределение поставок *оптимально* тогда и только тогда, когда оценки всех свободных клеток неотрицательны).

- Если решение исходной задачи *не оптимально*, то следует для клетки с отрицательной оценкой построить цикл и передать поставку в эту клетку по величине равную минимуму по клеткам цикла со знаком «–». Поле этого клетка, имевшая минимальное значение станет свободной, а свободная – заполненной. Число базисных клеток при этом не изменится.)

Замечание 1: Изменение коэффициентов затрат можно начинать с любого столбца (строки). Потенциал (число) строки или столбца может быть произвольным, но после его фиксации потенциалы остальных рядов будут определены однозначно.

Замечание 2: Для фиксированного базисного распределения поставок можно подобать различные наборы потенциалов, однако матрицы оценок во всех таких случаях будут одинаковыми.

1) Сбалансированность задачи

Рассматриваемая модель задачи не содержит неизвестных значений и, следовательно, уже задана сбалансированной (закрытой).

b (потребители) / ***a*** (поставщики)	**20**	**110**	**40**	**110**
60	1	2	5	3
120	1	6	5	2
100	6	3	7	4

2) Распределение поставок методом наименьших затрат

Результат распределения грузов методом наименьших затрат приведен в таблице:

b (потребители) / ***a*** (поставщики	**20**	**110**	**40**	**110**
60	1 / 20	2 / 40	5	3
120	1	6	5 / 10	2 / 110
100	6	3 / 70	7 / 30	4

Распределение является *базисным*, так как число заполненных клеток равно 6 и это число совпадает с условием
$m+n-1$ = 3+4 –1 = 6.

Суммарные затраты на перевозку

$$Z = 1*20 + 2*40 + 5*10 + 2*110 + 3*70 + 7*30 = 790.$$

3) *Метод потенциалов*

Составим матрицу оценок для свободных клеток, используя потенциалы строк и столбцов (заполненные клетки в таблице закрашены).

1	2	5	3	**-1(2)**
1	6	5	2	**0(6)**
6	3	7	4	**-2(4)**
0 (1)	**-1(3)**	**-5(5)**	**-2(6)**	

Расстановка потенциалов

Рядом с потенциалом ряда записываем номер шага в скобках.

(1) шаг: зафиксируем потенциал для 1-го столбца

Пусть он равен нулю.

Укажем под столбцом: 0(1) и выберем в этом столбце (↑)заполненную клетку в первой строке. Её коэффициент равен **1**, значит потенциал первой строки будет равен (–1). [в этом случае два потенциала в

сумме «обнулят» коэффициент в клетке(1;1)]

(2) шаг: зафиксируем потенциал для 1-ой строки.

Это число: - 1.

Укажем справа от строки число и номер шага: -1(2). Выберем в этой строке(⟵) заполненную клетку. Это клетка (1;2) с коэффициентом **2** во втором столбце, значит потенциал второго столбца будет равен (-1). [в этом случае два потенциала (-1)+(-1) в сумме «обнулят» коэффициент 2 в клетке(1;2)].

(3) шаг: зафиксируем потенциал для 2-го столбца.

Это число: - 1.

Укажем под столбцом число и номер шага:-1(3) и выберем в этом столбце (↑)заполненную клетку в третьей строке. Коэффициент клетки равен **3**, значит потенциал третьей строки будет равен (-2). [в этом случае два потенциала в сумме «обнулят» коэффициент в клетке(3;2)].

(4) шаг: зафиксируем потенциал для 3-ей строки.

Это число: - 2.

Укажем справа от строки число и номер шага: -2(4). Выберем в этой строке(⟵) заполненную клетку. Это клетка (3;3) с коэффициентом **7** в третьем столбце, значит потенциал третьего столбца будет равен (-5). [в этом случае два потенциала (-2)+(-5) в сумме «обнулят» коэффициент 7 в клетке(3;3)].

(5) шаг: зафиксируем потенциал для 3-го столбца.

Это число: - 5.

Укажем под столбцом число и номер шага:-5(5) и выберем в этом столбце (↑)заполненную клетку во второй строке. Коэффициент клетки равен **5**, значит потенциал второй строки будет равен (0). [в этом случае два потенциала (0)+(-5) в сумме «обнулят» коэффициент **5** в клетке(2;3)].

(6) шаг: зафиксируем потенциал для 2-ой строки.

Это число: 0.

Укажем справа от строки число и номер шага: 0(6). Выберем в этой строке(⟵) заполненную клетку. Это клетка (2;4) с коэффициентом **2** в четвертом столбце, значит потенциал четвертого столбца будет равен (-2). [в этом случае два потенциала (-2)+(0) в сумме «обнулят» коэффициент 2 в клетке(2;4)].

(7) шаг: зафиксируем потенциал для 4-го столбца.

Это число: - 2.

Укажем под столбцом число и номер шага: - 2(7).

Оценка свободных клеток

Составим матрицу оценок для свободных клеток (как сумм *коэффициента клетки* и двух *потенциалов* соответствующих столбцу и строке). На месте каждой занятой клетки поставим нули.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -5+5-1 & -2+3-1 \\ 0+1+0 & -1+6+0 & 0 & 0 \\ 0+6-2 & 0 & 0 & -2+4-2 \end{pmatrix} \text{или} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы оценок, соответствующие свободным клеткам таблицы поставок, равны оценкам этих свободных клеток.

Отметим, что план *не является* оптимальным, так как в матрице оценок свободных клеток есть отрицательная оценка.

Так как решение исходной задачи *не оптимально*, то следует для клетки с отрицательной оценкой (-1) построить цикл и передать поставку в эту клетку по величине равную минимуму по клеткам цикла со знаком «–».

$$\min(40;30) = 30$$

Поле этого клетка, имевшая минимальное значение станет свободной, а свободная – заполненной. Число базисных клеток при этом не изменится.

b (потребители) ***a*** (поставщики)	**20**	**110**	**40**	**110**
60	1 / 20	2 ⊖ / 40-**30**	5 ⊕ / **+30**	3
120	1	6	5 / 10	2 / 110
100	6	3 ⊕ / 70+**30**	7 ⊖ / 30-**30**	4

b (потребители) ***a*** (поставщики	**20**	**110**	**40**	**110**
60	1 / 20	2 / 10	5 / 30	3
120	1	6	5 / 10	2 / 110
100	6	3 / 100	7	4

Составим матрицу оценок для свободных клеток, используя потенциалы строк и столбцов

1	2	5	3	**-1(2)**

1	6	5	2	**-1(6)**
6	3	7	4	**-2(4)**
0 (1)	**-1(3)**	**-4(5)**	**-1(6)**	

Суммарные затраты на перевозку
$Z = 1*20 + 2*10 + 5*30 + 5*10 + 2*110 + 3*100 = 760$

Составим матрицу оценок для свободных клеток

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1+3-1 \\ 0+1-1 & -1+6-1 & 0 & 0 \\ 0+6-2 & 0 & -4+7-2 & -1+4-2 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вывод: план является оптимальным, так как в матрице оценок свободных клеток нет отрицательных значений.

Замечание: Оптимальное распределение поставок не единственное, так как среди оценок свободных клеток есть нулевая.

Задача 3:

Планируется распределение начальной суммы $S_0 = 5$ усл. ед. между четырьмя предприятиями, причем средства выделяются только в размерах, кратных 1 усл. ед. Предполагается, что выделенные k-му предприятию (k=1, 2, 3, 4) в начале планового периода средства x приносят прибыль $f_k(x)$.

Считать, что:

1) прибыль $f_k(x)$, полученная от вложения средств в предприятие, не зависит от вложения средств в другие предприятия;
2) прибыль, полученная от разных предприятий, выражается в одинаковых условных единицах;
3) суммарная прибыль равна сумме прибылей, полученных от каждого предприятия.

Функции $f_k(x)$ заданы в табл. 3.1

Таблица 3.1

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	8	6	3	4
2	10	9	4	6
3	11	11	7	8
4	12	13	11	13
5	18	15	18	16

Задание:

1. Определить, какое количество средств нужно выделить каждому предприятию, чтобы суммарная прибыль была наибольшей (используйте принцип оптимальности и уравнения Беллмана).
2. Приведите расчетные таблицы (возможно использование Excel).
3. Опишите особенности модели.

Решение:

Обозначим через x_k количество средств, выделенных k-му предприятию. (нумерацию предприятий в процессе решения следует сохранять неизменной).

Целевая функция $Z=\sum_{k=1}^{4} f_k(x_k)$.

Переменные x удовлетворяют ограничениям

$$Z=\sum_{k=1}^{4} x_k = 5,$$

$$x_k \ge 0, \quad k=1,2,3,4.$$

Требуется найти переменные x_1, x_2, x_3, x_4, удовлетворяющие системе ограничений и обращающие в максимум целевую функцию.

Схема решения задачи методом динамического программирования может иметь следующий вид:

- процесс распределения средств $s_0 = 5$ можно рассматривать как четырехшаговый, номер шага совпадает с номером предприятия;
- выбор переменных x_1, x_2, x_3, x_4 –управление соответственно на I, II, III. IV шагах;
- $\hat{s}$ – конечное состояние процесса распределения ($\hat{s}$=0, так как все средства должны быть вложены в производство);
- уравнения состояний $s_k = s_{k-1} - x_k$, $k=1,2,3,4,$ где s_k – параметр состояния – количество средств, оставшихся после k-го шага.

Используем уравнения Беллмана

$Z_k^*\left(s_{k-1}\right)=\max\limits_{\{X_k\}}\left\{f_k(s_{k-1}, X_k)+Z_{k+1}^*(s_k)\right\}, k=n-1, n-2, ..., 2, 1$, где

n – общее количество шагов (расчет ведется, начиная с последнего шага);

s_{k-1}, s_k – состояние системы соответственно в конце ($k-1$)-го и k-го шагов;

$Z_k^*\left(s_{k-1}\right)$ –условный максимум целевой функции;

X_k – произвольное управление на k-м шаге и оптимальном управлении на последующих $n-k$ шагах;

$f_k(s_{k-1}, X_k)$ – показатель эффективности k-го шага.

Уравнения Беллмана представляют рекуррентные соотношения, позволяющие найти предыдущее значение функции через последующие значения.

Для рассматриваемой задачи уравнения Беллмана имеют вид:

$$k = 4,\ s_4 = 0 \Rightarrow Z_4^*\left(s_3\right)=\max_{0\le x_4\le s_3} f_4(x_4),$$

$$k = 3,\ Z_3^*\left(s_2\right)=\max_{0\le x_3\le s_2}\left\{f_3(x_3)+Z_4^*\left(s_3\right)\right\},$$

$$k = 2,\ Z_2^*\left(s_1\right)=\max_{0\le x_2\le s_1}\left\{f_2(x_2)+Z_3^*\left(s_2\right)\right\},$$

$$k = 1,\ Z_1^*\left(5\right)=\max_{0\le x_1\le 5}\left\{f_1(x_1)+Z_2^*\left(s_1\right)\right\}.$$

Последовательно решаем записанные уравнения, проводя условную оптимизацию каждого шага.

IV шаг. Начинаем с последнего шага, предполагая, что к этому моменту средства первому, второму и третьему предприятиям уже распределены. Все средства, оставшиеся к IV шагу, следует вложить в 4-е предприятие. При этом возможная оставшаяся сумма может быть любой: s_3 = 0, 1, …, 5 (усл. е)

Получим

$$Z_4^*\left(s_3\right) = f_4(s_3) \text{ и } x_4^*\left(s_3\right) = s_3.$$

III шаг. Делаем все предположения относительно остатка средств s_2, к **III** шагу (т.е. после выбора x_1, и x_2); s_2 может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, 5 (в зависимости от того, сколько получили первые два предприятия). Выбираем $0 \le x_3 \le s_2$, находим $s_3 = s_2 - x_3$, и сравниваем для разных значений x_3 при фиксированном значении s_2, значения суммы $f_3(x_3) + Z_4^*\left(s_3\right)$. Наибольшее из этих значений есть $Z_3^*(s_2)$ – условная оптимальная прибыль, полученная при оптимальном распределении средств между 3-м и 4-м предприятиями. Оптимизация дана в табл. 3.2 при *k* = 3.

Для шагов **II** и **I** проводим рассуждения аналогично шагу **III**.

Все данные, полученные в ходе решения задачи методом динамического программирования занесены в табл.3.2.

Таблица 3.2

s_{k-1} Сумма к распре-делению	x_k Сум-ма для k -го пред.	s_k Сум-ма - оста-ток после k -го шага	k =3			k =2			k =1		
			$f_3(x_3)+Z_4^*(s_3)$	$Z_3^*(s_2)$ условная прибыль	$x_3^*(s_2)$	$f_2(x_2)+Z_3^*(s_2)$	$Z_2^*(s_1)$ условная прибыль	$x_2^*(s_1)$	$f_1(x_1)+Z_2^*(s_1)$	$Z_1^*(s_0)$ условная прибыль	$x_1^*(s_0)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0 1	1 0	0+4=4 3+0=3	4	0	0+4=4 6+0=6	6	1	0+6=6 8+0=8	8	1
2	0 1 2	2 <u>1</u> 0	0+6=6 3+<u>4</u>=7 4+0=4	<u>7</u>	<u>1</u>	0+7=7 6+4=10 9+0=9	10	1	0+10=10 8+6=14 10+0=10	14	1
3	0 1 2 3	3 2 1 0	0+8=0 3+6=9 4+4=8 7+0=7	9	1	0+9=9 6+7=13 9+4=13 11+0=11	13	1 2	0+13=13 8+10=18 10+6=16 11+0=11	18	1
4	0 1 2 3 4	4 3 2 1 0	0+13=13 3+8=11 4+6=10 7+4=11 11+0=11	13	0	0+13=13 6+9=15 9+<u>7</u>=16 11+4=15 13+0=13	<u>16</u>	<u>2</u>	0+16=16 8+13=21 10+10=20 11+6=17 12+0=12	21	1
5	0 1 2 3 4 5	5 4 3 2 1 0	0+16=16 3+13=16 4+8=12 7+6=13 11+4=15 18+0=18	18	5	0+18=18 6+13=19 9++9=18 11+7=18 13+4=17 15+0=15	19	1	0+19=19 8+<u>16</u>=24 10+13=23 11+10=21 12+6=18 18+0=18	**<u>24</u>**	<u>1</u>

(в таблице подчеркнуты значения, соответствующие оптимальным условным прибылям и суммы, выделяемые предприятиям)

Вывод: максимум суммарной прибыли равен 24 усл. ед. при условии, что выделены средства:

первому предприятию 1 усл. ед.;
второму предприятию - 2 усл. ед.;
третьему предприятию - 1 усл. ед.;
четвертому предприятию - 1 усл. ед.